



ΦΛΕΜΙΓΚ 3 -- ΡΑΦΗΝΑ -- 19009 -- ΤΗΛ. 22940-29120  
ΑΓ.ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΥ 11 -- ΠΕΙΡΑΙΑΣ -- 18532 -- ΤΗΛ. 210-4224752, 4223687

## ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

### ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

#### ΘΕΜΑ Α

A1. α) §1.2 σελ 15

β) §1.3 σελ 35

A2. §2.7 σελ 142

A3. § 2.6 σελ 135

A4. α) ΛΑΘΟΣ θεώρημα σελ 133 παράδειγμα σελ 134

β) ΛΑΘΟΣ διότι μπορεί η  $f$  να μην είναι συνεχής, παράδειγμα σελ 71

A5. γ

#### ΘΕΜΑ Β

B1. θα πρέπει  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 2 \Rightarrow$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (e^{-x} + \lambda) = 2 \Rightarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} + \lim_{x \rightarrow \infty} \lambda = 2 \Rightarrow$$

$$0 + \lambda = 2 \Rightarrow \lambda = 2$$

$$\text{Άρα } f(x) = e^{-x} + 2$$

B2.

Η  $f$  είναι συνεχής στο  $\mathbb{R}$  ως πράξη συνεχών.

Έστω  $g(x) = f(x) - x$

Η  $g$  συνεχής στο  $[2,3]$  ως πράξη συνεχών.

$$g(2) = e^{-2} + 2 - 2 = e^{-2} > 0$$

$$g(3) = e^{-3} + 2 - 3 = \frac{1}{e^3} - 1 < 0$$

Από Θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον

ένα  $x_0 \in (2,3)$ :  $g(x_0) = 0 \Rightarrow f(x_0) - x_0 = 0 \Rightarrow f(x_0) = x_0$

$$g'(x) = f'(x) - 1 = -e^{-x} - 1 < 0$$

η  $g$  είναι γνησίως φθίνουσα στο  $\mathbb{R}$  οπότε η λύση είναι μοναδική.

B3.

$f'(x) = -e^{-x} < 0$ , η  $f$  είναι γν.φθίνουσα στο  $\mathbb{R}$   
οπότε είναι 1-1, και ορίζεται η αντίστροφή της.

Η  $f$  συνεχής στο  $\mathbb{R}$  και γν.φθίνουσα άρα

$$f(\mathbb{R}) = (\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)) = (2, +\infty)$$

Άρα  $A_{f^{-1}} = (2, +\infty)$

$$\text{Θέτω } f(x) = y \Rightarrow y = e^{-x} + 2 \Rightarrow e^{-x} = y - 2 \Rightarrow$$

$$-x = \ln(y - 2) \Rightarrow x = -\ln(y - 2)$$

Άρα  $f^{-1}(x) = -\ln(x - 2)$ ,  $x > 2$

B4.

$$f^{-1}(x) = -\ln(x - 2)$$

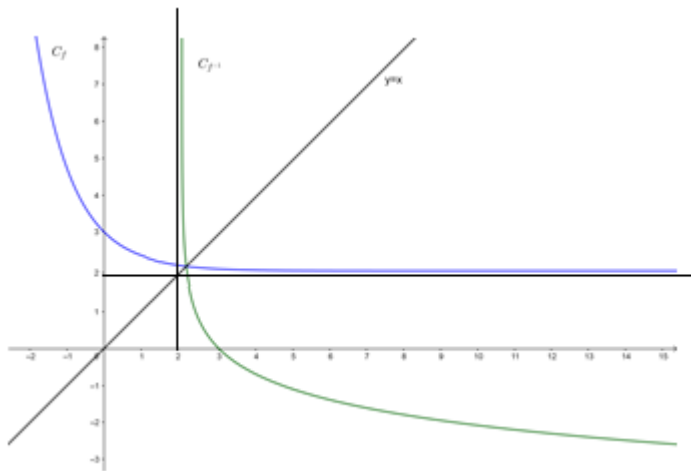
$$\lim_{x \rightarrow 2^+} (-\ln(x - 2))$$

$$\text{θέτω } u = x - 2$$

$$\text{άρα } x \rightarrow 2^+ \text{ άρα } u \rightarrow 0^+$$

$$\text{οπότε } \lim_{u \rightarrow 0^+} (-\ln(u)) = -(-\infty) = +\infty$$

άρα η  $x = 2$  κατακόρυφη ασύμπτωτη



### ΘΕΜΑ Γ

Γ1.  $f$  συνεχής στο  $x=1$ , ως παραγωγίσιμη

$$\cdot \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1) \Rightarrow$$

$$1+a = 1+\beta = f(1) \Rightarrow$$

$$a = \beta \quad (1)$$

$f$  παραγωγίσιμη στο  $x=1$ , άρα

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x-1}$$

$$\cdot \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 + a - (1+a)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - 1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} x+1 = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{e^{x-1} + \beta x - (1+\beta)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{e^{x-1} + \beta x - 1 - \beta}{x-1} \stackrel{DLH}{=} \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{e^{x-1} + \beta}{1} = 1 + \beta$$

$$\text{οπότε } \beta + 1 = 2 \Rightarrow \beta = 1$$

$$(1) \Rightarrow \alpha = 1$$

Γ2.

Η  $f$  συνεχής ως παραγωγίσιμη.

$$f'(x) = \begin{cases} 2x, & x \geq 1 \\ e^{x-1} + 1, & x < 1 \end{cases}$$

Στο  $[1, +\infty)$  η  $f$  συνεχής και  $f(x) > 0$  άρα η  $f$  γν.αύξουσα στο  $[1, +\infty)$ .

Στο  $(-\infty, 1)$  η  $f$  συνεχής και  $f(x) > 0$  άρα η  $f$  γν.αύξουσα στο  $(-\infty, 1)$ .

Η  $f$  συνεχής στο  $x=1$  άρα η  $f$  γν.αύξουσα στο  $\mathbb{R}$ .

Η  $f$  συνεχής και γν.αύξουσα στο  $\mathbb{R}$  άρα

$$f(\mathbb{R}) = (\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x))$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^{x-1} + x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{x-1} = \lim_{\substack{u=x-1 \\ u \rightarrow -\infty}} e^u = 0$$

οπότε  $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$

Γ3. i) Το  $0 \in f(\mathbb{R})$  άρα η εξίσωση  $f(x) = 0$  έχει λύση  $(x_0)$ , η οποία είναι μοναδική λόγω μονοτονίας

$$\text{Έχουμε } f(0) = e^{-1} > 0$$

Η  $f$  είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο  $A_1 = (-\infty, 0]$ , άρα

$$f(A_1) = \left( \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), f(0) \right] = (-\infty, e^{-1}], \text{ οπότε } 0 \in f(A_1) \text{ δηλαδή η ρίζα της εξίσωσης}$$

$f(x) = 0$  ανήκει στο  $(-\infty, 0)$  επομένως η ρίζα είναι αρνητική.

ii) Έστω ότι η εξίσωση  $f^2(x) - x_0 \cdot f(x) = 0$  έχει ρίζα την  $\xi \in (x_0, +\infty)$ . Έχουμε ότι

$$f(\xi) \cdot (f(\xi) - x_0) = 0 \Leftrightarrow f(\xi) = 0 \text{ ή } f(\xi) - x_0 = 0$$

Αν  $f(\xi) = 0$  Άτοπο γιατί,  $\xi \in (x_0, +\infty)$  και  $x_0$  μοναδική ρίζα.

Αν  $f(\xi) - x_0 = 0 \Leftrightarrow f(\xi) = x_0$  έχουμε:

Η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $(x_0, +\infty)$  και συνεχής με

$$f((x_0, +\infty)) = \left( \lim_{x \rightarrow x_0} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = \left( f(x_0), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = (0, +\infty).$$

Όμως  $x_0 \notin (0, +\infty)$  αφού  $x_0 \in (-1, 0)$  οπότε η εξίσωση δεν έχει ρίζα.

Γ4.

$$x(t_0) = 3$$

$$x'(t_0) = 2$$

$$(MOK) = \frac{1}{2} \cdot OK \cdot MK = \frac{1}{2} \cdot x \cdot f(x) = \frac{1}{2} x(x^2 + 1) = \frac{x^3 + x}{2} \text{ με } x \geq 1 \text{ και } f(x) \geq 1$$

$$E(t) = \frac{x^3(t) + x(t)}{2}$$

$$E'(t) = \frac{3x^2(t) \cdot x'(t) + x'(t)}{2}$$

$$E'(t_0) = \frac{3x^2(t_0) \cdot x'(t_0) + x'(t_0)}{2} = 28 \text{ τμ/s}$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1.

$y = -x + 2$  εφάπτεται της  $C_f$  στο  $A(1,1)$  άρα

$$f(1) = -1 + 2 \Rightarrow a + \beta = 1 \quad (1)$$

$$f'(1) = -1$$

$$f'(x) = \ln(x^2 - 2x + 2) + \frac{(x-1) \cdot (2x-2)}{x^2 - 2x + 2} + a$$

$$\cdot f'(1) = -1 \Rightarrow \ln 1 + 0 + a = -1 \Rightarrow a = -1$$

$$(1) \Rightarrow \beta = 2$$

Δ2.

$$f(x) = (x-1) \cdot \ln(x^2 - 2x + 2) - x + 2$$

$$h(x) = f(x) - (-x + 2) = (x-1) \cdot \ln(x^2 - 2x + 2)$$

$$= (x-1) \cdot \ln(x^2 - 2x + 2)$$

· Στο  $[1, 2]$ ,  $x \geq 1 \Rightarrow x - 1 \geq 0$

·  $x^2 - 2x + 2 = (x-1)^2 + 1 \geq 1$  άρα  $\ln x^2 - 2x + 2 \geq 0$

άρα  $h(x) \geq 0$  και συνεχής στο  $[1,2]$  ως πράξεις και σύνθεση συνεχών

$$E = \int_1^2 |h(x)| dx = \int_1^2 (x-1) \cdot \ln(x^2 - 2x + 2) dx =$$

$$\int_1^2 \left(\frac{x^2}{2} - x\right)' \cdot \ln(x^2 - 2x + 2) dx =$$

$$\left[\left(\frac{x^2}{2} - x\right) \cdot \ln(x^2 - 2x + 2)\right]_1^2 - \int_1^2 \left(\frac{x^2 - 2x}{2}\right) \cdot \frac{2x - 2}{x^2 - 2x + 2} dx$$

$$= 0 - \int_1^2 \frac{(x^2 - 2x) \cdot (x-1)}{x^2 - 2x + 2} dx = - \int_1^2 \frac{x^3 - 3x^2 + 2x}{x^2 - 2x + 2} dx \quad (\text{εκτελούμε διαίρεση})$$

$$= - \int_1^2 \left(x - 1 + \frac{-2x + 2}{x^2 - 2x + 2}\right) dx$$

$$= - \left[\frac{x^2}{2} - x - \ln|x^2 - 2x + 2|\right]_1^2$$

$$= \ln 2 - \frac{1}{2} = \frac{2 \ln 2 - 1}{2} \tau.μ.$$

Εναλλακτική λύση για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος

$$u = x^2 - 2x + 2$$

$$du = (2x - 2) dx$$

$$du = 2(x - 1) dx$$

$$\frac{1}{2} du = (x - 1) dx$$

$$E = \int_1^2 \frac{1}{2} \ln u du = \int_1^2 -\frac{1}{2} (u)' \ln u du = \left[\frac{1}{2} u \ln u\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{1}{2} \cdot u \cdot \frac{1}{u} du = \ln 2 - \frac{1}{2} (2 - 1)$$

$$= \ln 2 - \frac{1}{2} = \frac{2 \ln 2 - 1}{2} \tau.μ$$

Δ3.

$$i) f'(x) = \ln(x^2 - 2x + 2) + \frac{2(x-1)^2}{x^2 - 2x + 2} - 1$$

$$f'(x) \geq -1 \Rightarrow \ln(x^2 - 2x + 2) + \frac{2(x-1)^2}{x^2 - 2x + 2} - 1 \geq 0 \text{ ισχύει.}$$

$$\ln(x^2 - 2x + 2) = \ln[(x-1)^2 + 1] \geq 0 \text{ και } \frac{2(x-1)^2}{x^2 - 2x + 2} \geq 0$$

ii)

$$f\left(\lambda + \frac{1}{2}\right) + 2 - \frac{3}{2} \geq (\lambda - 1) \cdot \ln(\lambda^2 - 2\lambda + 2) - \lambda + 2 \Rightarrow$$

$$f\left(\lambda + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} \geq f(\lambda) \Rightarrow$$

$$f\left(\lambda + \frac{1}{2}\right) - f(\lambda) \geq -\frac{1}{2}$$

Η  $f$  συνεχής στο  $\left[\lambda, \lambda + \frac{1}{2}\right]$  και παραγωγίσιμη στο  $\left(\lambda, \lambda + \frac{1}{2}\right)$ .

Από Θεώρημα Μέσης Τιμής υπάρχει τουλάχιστον ένα  $\xi \in \left(\lambda, \lambda + \frac{1}{2}\right)$

$$\text{με } f'(\xi) = \frac{f\left(\lambda + \frac{1}{2}\right) - f(\lambda)}{\frac{1}{2}}$$

$$f'(x) \geq -1 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}, \text{ άρα και } f'(\xi) \geq -1 \Rightarrow f\left(\lambda + \frac{1}{2}\right) - f(\lambda) \geq -\frac{1}{2}$$

Δ4.

Έστω η  $(\varepsilon_1)$  η εφαπτομένη της  $C_g$  στο  $(x_1, g(x_1))$   $(\varepsilon_1): y - g(x_1) = g'(x_1) \cdot (x - x_1)$ .

Έστω η  $(\varepsilon_2)$  η εφαπτομένη της  $C_f$  στο  $(x_2, f(x_2))$   $(\varepsilon_2): y - f(x_2) = f'(x_2) \cdot (x - x_2)$ .

Για να ταυτίζονται οι  $(\varepsilon_1), (\varepsilon_2)$  αρκεί  $g'(x_1) = f'(x_2) \Leftrightarrow -3x_1^2 - 1 = f'(x_2)$

Ακόμα  $\left. \begin{array}{l} g'(x_1) \leq -1 \\ f'(x_2) \geq -1 \end{array} \right\}$  οπότε είναι ίσες μόνο όταν  $g'(x_1) = -1$  και  $f'(x_2) = -1$ .

$$g'(x_1) = -1 \Leftrightarrow -3x_1^2 - 1 = -1 \Leftrightarrow x_1^2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0$$

$$f'(x_2) = -1 \Leftrightarrow \ln(x_2^2 - 2x_2 + 2) + \frac{2(x_2 - 1)^2}{x_2^2 - 2x_2 + 2} - 1 = -1 \Leftrightarrow \ln(x_2^2 - 2x_2 + 2) + \frac{2(x_2 - 1)^2}{x_2^2 - 2x_2 + 2} = 0$$

Προφανώς  $x_2 = 1$  μοναδική λύση γιατί για  $x_2 \neq 1$   $\ln((x_2 - 1)^2 + 1) + \frac{2(x_2 - 1)^2}{x_2^2 - 2x_2 + 2} > 0$ .

Η εξίσωση της κοινής εφαπτομένης είναι  $y - f(1) = f'(1) \cdot (x - 1) \Leftrightarrow y = -x + 2$

2ος Τρόπος

Η εφαπτομένη της  $C_f$  στο Α είναι η  $(\varepsilon): y = -x + 2$ . Για να είναι και εφαπτομένη της  $C_g$  στο  $B(x_0, y_0)$  πρέπει να ισχύει  $g'(x_0) = -1$  και  $g(x_0) = -x_0 + 2$

$$g'(x) = -3x^2 - 1$$

$$g'(x_0) = -1 \Leftrightarrow -3x_0^2 - 1 = -1 \Leftrightarrow x_0 = 0$$

$$g(0) = 2 \Leftrightarrow 2 = 2 \text{ ισχύει}$$

άρα η  $(\varepsilon)$  είναι εφαπτομένη και της  $C_g$  στο  $B(0, 2)$ .

Έστω ότι υπάρχει και άλλη κοινή εφαπτομένη. Τότε πρέπει να ισχύει

$$f'(x_1) = g'(x_2) \text{ με } x_1 \neq 1 \text{ και } x_2 \neq 0$$

όμως  $g'(x) = -3x^2 - 1 = -(3x^2 + 1) \leq 0 \forall x$  με το ίσον μόνο για  $x = 0$

και αφού  $f'(x) \geq -1 \forall x$  με το ίσον μόνο για  $x = 1$

Δεν υπάρχουν άλλες τιμές του  $x$  ώστε να ικανοποιείται η  $f'(x_1) = g'(x_2)$

Άρα η  $(\varepsilon): y = -x + 2$  είναι η μοναδική κοινή εφαπτομένη των  $C_f$  και  $C_g$ .

**ΟΡΟΣΗΜΟ ΡΑΦΗΝΑΣ**

**ΕΛΕΝΗ ΛΙΑΚΟΥΡΑ**

**ΓΙΩΡΓΟΣ ΚΑΠΡΑΛΟΣ**

**ΘΑΝΑΣΗΣ ΜΑΛΑΚΗΣ**

**ΟΡΟΣΗΜΟ ΠΕΙΡΑΙΑ**

**ΜΠΑΞΕΒΑΝΙΔΗΣ ΓΡΗΓΟΡΗΣ**

**ΣΩΤΗΡΟΠΟΥΛΟΥ ΔΕΣΠΟΙΝΑ**

**ΚΑΤΣΙΜΠΡΑΣ ΕΥΘΥΜΗΣ**

**ΜΑΡΙΑ ΕΛΕΥΘΕΡΙΟΥ**

**ΧΑΡΙΣΗ ΣΤΕΛΛΑ**

**ΚΑΜΜΑΣ ΠΑΝΤΕΛΗΣ**

**ΝΑΣΟΠΟΥΛΟΥ ΕΛΠΙΔΑ**